

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.1 라그랑주 승수법

1.

(a) $x = 12, y = 4$

(b) 풀이 생략

2.

$Q_1 = 10, Q_2 = 5, \lambda = -30$

3.

(a) $x = \frac{3}{10}m, y = \frac{1}{10}m$

(b) $x = 10, y = 6250000$

(c) $x = \frac{3}{8}, y = 1$

4.

(a) $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \lambda = \frac{8}{5}$

(b) $(x, y) = (8, 4), \lambda = 16$

(c) $(x, y) = (50, 50), \lambda = 250$

5.

$x = 250, y = 125$

6.

$m = \frac{awT_0}{a+b}, l = \frac{bT_0}{a+b}$

7.

풀이 생략

8.

(a) 증명 생략

(b) $P'_x(x, y) = -12x - 2y + 96, P'_y(x, y) = -6y - 2x + 84$, 임계점은 $(x, y) = (6, 12)$

(c) $x = 4, y = 7$

9.

(a) $\gamma = \frac{1}{1-a}$ 일 때 $x^*(p, m) = a^\gamma p^{-\gamma}, y^*(p, m) = m - a^\gamma p^{1-\gamma}$

(b) $\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{x^*}{1-a}p < 0, \frac{\partial x^*}{\partial m} = 0, \frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{ax^*}{1-a} > 0, \frac{\partial y^*}{\partial m} = 1$

(c) $El_p x^*(p, m) = -\frac{a}{1-a} < 0$

(d) $U^*(p, m) = m + \frac{1}{4p}$

증명 생략

10.

(a) $x(p, q, m) = \frac{m + q \ln\left(\frac{q}{p}\right)}{p + q}, y(p, q, m) = \frac{m + p \ln\left(\frac{p}{q}\right)}{p + q}$

(b) (i) $p \geq q$ 와 $m \geq q \ln\left(\frac{p}{q}\right)$, 또는 (ii) $p \leq q$ 와 $m \geq p \ln\left(\frac{q}{p}\right)$

(c) 증명 생략

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.2 라그랑주 승수의 해석

1.

증명 생략

2.

(a) $K^* = \frac{w^2}{4r^2}, L^* = Q - \frac{w}{2r}$

(b) 증명 생략

3.

(a) $x = \frac{a}{5}, y = \frac{2a}{5}$

(b) 증명 생략

(c) 최대화 문제의 해는 존재하지 않는다.

4.

(a) $x^* = 4, y^* = 24, \lambda = \frac{1}{4}$

(b) $\Delta U = \frac{1}{4}$

(c) $x^* = \frac{q^2}{4p^2}, y^* = \frac{m}{q} - \frac{q}{4p}$

5.

증명 생략

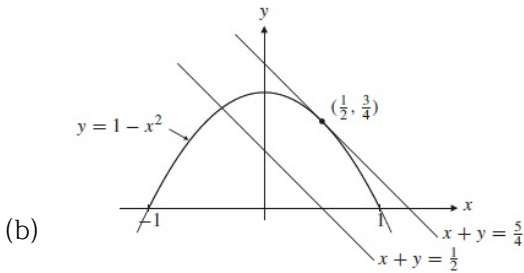
6.

$f(x, T) = -\frac{1}{6}\alpha x T^5 + \frac{1}{12}x T^4 + \frac{1}{6}x T^3, g(x, T) = \frac{1}{6}x T^3, x = \frac{1}{4}\alpha$

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.3 다수의 후보 해

- 1.
- (a) 최대화 문제의 해 : $(2, 2), (-2, -2)$
최소화 문제의 해 : $(-2, 2), (2, -2)$
- (b) 최대화 문제의 해 : $(3, -1)$
최소화 문제의 해 : $(-3, 1)$
- 2.
- (a) $(x, y, \lambda) = \left(-4, 0, \frac{5}{4}\right)$ 에서 최댓값, $(x, y, \lambda) = \left(\frac{4}{3}, \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ 에서 최솟값을 가진다.
- (b) $\left(\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ 와 $\left(-\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ 에서 최솟값을 가진다.
- 3.
- (a) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}, \lambda = 1$



- (c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 에서 최댓값이 존재하고, 최솟값 문제는 해가 없다.
- 4.
- (a) $x = 6, y = 2$
- (b) 대략 1 증가한다.
- 5.
- (a) $Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 에서 $\mathbf{x}'$ 은 행벡터 (x_1, x_2) 이고 $\mathbf{A}$ 는 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ 이다.
- (b) 증명 생략
- (c) 증명 생략
- (d) 제약 최대화 문제의 해 : $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, 1)'$
제약 최소화 문제의 해 : $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, -1)'$

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.4 라그랑수 승수법이 성립하는 이유

1.

증명 생략

2.

풀이 생략

3.

(a) 증명 생략

(b) $x = 9$, $y = 4$

(c) 풀이 생략

4.

증명 생략

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.5 충분조건

1.

라그랑지안 함수 $\mathcal{L} = 10x^{1/2}y^{1/3} - \lambda(2x + 2y - m)$ 은 (x, y) 에 대해 오목하다.

2.

$$D(x, y, \lambda) = -\frac{q^2}{x^2} - \frac{p^2}{y^2}$$

3.

$$D(x, y, \lambda) = 10$$

4.

증명 생략

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.6 추가 변수와 제약조건

1.

(a) $\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1)$
 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(b) 풀이 생략

2.

$x = 45, y = 40, z = 15$

3.

(a) $\mathcal{L}'_1 = 1 - \lambda p = 0, \mathcal{L}'_2 = \frac{1}{2}y^{-1/2} - \lambda q = 0, \mathcal{L}'_3 = z^{-2} - \lambda r = 0$

(b) $x = \frac{m}{p} - \frac{p}{4q} - \sqrt{\frac{r}{p}}, y = \frac{p^2}{4q^2}, z = \sqrt{\frac{p}{r}}$

(c) 증명 생략

(d) $\frac{\partial U^*}{\partial m} = \lambda$

4.

$x^* = \frac{\alpha w L}{p}, y^* = \frac{\beta w L}{q}, l^* = (\alpha + \beta)L$

5.

증명 생략

6.

$j = 1, \dots, n$ 에 대해 $x_j = \frac{\frac{1}{a_j^2}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i^2}\right)}$

어떤 i 에 대해 $a_i = 0$ 이면 $x_i = 1$ 이고 다른 모든 j 에 대해 $x_j = 0$ 이다.

7.

$(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 이 최대점 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ 이 최소점

8.

(a) $j = 1, \dots, n$ 에 대해 $x_j = \frac{a_j m}{p_j(a_1 + \dots + a_n)}$

(b) $j = 1, \dots, n$ 에 대해 $x_j = \frac{mp_j^{-\frac{1}{1-a}}}{\sum_{i=1}^n p_i^{-\frac{1}{1-a}}}$

CHAPTER 17 등식 제약조건

17.7 비교정확

1.

$$(a) \quad (x^*, y^*) = \left(\frac{m}{p} - a, \frac{ap}{q} \right)$$

$$(b) \quad U^*(p, q, m, a) = \frac{m}{p} - a + a \ln a + a \ln p - a \ln q \quad \circlearrowleft \text{므로,}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} = -\frac{m}{p^2} + \frac{a}{p}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial q} = -\frac{a}{q}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial m} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial a} = \ln a + \ln p - \ln q$$

(c) 증명 생략

2.

$$a = -\frac{\sqrt{b}}{6} \text{ 일 때 최소점은 } (x^*, y^*, z^*) = (a, 2a, pa)$$

3.

$$(a) \quad M = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}}} \text{ 일 때 } x = \frac{aM}{\alpha}, y = \frac{bM}{\beta}, z = \frac{cM}{\gamma}$$

(b) 증명 생략

$$(c) \text{ 정확한 증가량은 } 5(\sqrt{101} - \sqrt{100})$$

4.

$$(a) \text{ 최대화 문제의 해 : } \left(\frac{1}{4} \sqrt{15}, 0, \frac{1}{8} \right), \left(-\frac{1}{4} \sqrt{15}, 0, \frac{1}{8} \right)$$

$$\text{최소화 문제의 해 : } \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(b) \quad \Delta f^* \approx 0.02$$

5.

$$K^* = 2^{1/3} r^{-1/3} w^{1/3} Q^{4/3}, \quad L^* = 2^{-2/3} r^{2/3} w^{-2/3} Q^{4/3}, \quad C^* = 3 \cdot 2^{-2/3} r^{2/3} w^{1/3} Q^{4/3}, \quad \lambda = 2^{4/3} r^{2/3} w^{1/3} Q^{1/3}$$

6.

증명 생략

7.

$$(a) \quad x^*(p, q, m, a) = \frac{q^2}{4a^2 p^2}, \quad y^*(p, q, m, a) = \frac{m}{q} - \frac{q}{4a^2 p}, \quad U^*(p, q, m, a) = \frac{q}{4ap} + \frac{am}{q}$$

$$(b) \quad \frac{\partial U^*}{\partial p} = -\frac{q}{4ap^2}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial q} = \frac{1}{4ap} - \frac{am}{q^2}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial m} = \frac{a}{q}, \quad \frac{\partial U^*}{\partial a} = -\frac{q}{4a^2 p} + \frac{m}{q}$$

CHAPTER 17 등식 제약조건

CHAPTER 17 복습문제

17.1

- (a) 최대화 문제의 해 : $(x, y) = (9, 12)$
최소화 문제의 해 : $(x, y) = (-9, -12)$
- (b) $f^*(225 - 1) - f^*(225) \approx -\frac{1}{6}$

17.2

- (a) $x = \frac{2m}{5p}, y = \frac{3m}{5q}$
- (b) $x = \frac{m}{3p}, y = \frac{2m}{3q}$
- (c) $x = \frac{3m}{5p}, y = \frac{2m}{5q}$

17.3

- (a) $\pi = xp(x) + yq(y) - C(x, y)$
일계조건 : $p(x^*) + x^* p'(x^*) = C'_1(x^*, y^*)$ 와 $q(y^*) + y^* q'(y^*) = C'_2(x^*, y^*)$
- (b) $p(\hat{x}) + \hat{x} p'(\hat{x}) - C'_1(\hat{x}, \hat{y}) - \lambda = 0$ 와 (ii) $q(\hat{y}) + \hat{y} q'(\hat{y}) - C'_2(\hat{x}, \hat{y}) - \lambda = 0$

17.4

증명 생략

17.5

- (a) 최대화 문제의 해 : $x = -2\sqrt{b}, y = 0$
최소화 문제의 해 : $x = \frac{4}{3}, y = \pm \sqrt{b - \frac{4}{9}}$

- (b) 증명 생략

17.6

- (a) $v'(x) = \lambda p, w'(y) = \lambda q$
- (b) 풀이 생략

17.7

- (a) 증명 생략

- (b) $\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{1}{2x(3x+b)}, \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = -\frac{1}{4}(6x+b)[x(3x+b)]^{-3}, \frac{\partial x}{\partial b} = -\frac{x}{2(3x+b)}$